

ОСОБЕННОСТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПОТОКОВ И ЛИНИЙ В ПСЕВДОФИНСЛЕРОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ. II

© А. Н. Курбацкий¹⁾, Н. Г. Павлова²⁾, А. О. Ремизов³⁾

¹⁾ Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
119991, Российская Федерация, г. Москва, Ленинские горы, 1
Московская школа экономики
119334, Российская Федерация, г. Москва, Ленинский проспект, 38А
E-mail: akurbatskiy@gmail.com

²⁾ Российский университет дружбы народов
117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6
E-mail: natasharussia@mail.ru

³⁾ Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН
117997, Российская Федерация, г. Москва, ул. Профсоюзная, 65
E-mail: alexey-remizov@yandex.ru

Эта статья является второй частью серии работ, посвященных особенностям геодезических потоков в обобщенных финслеровых (псевдофинслеровых) пространствах. В первой статье геодезические были определены как экстремали некоторого функционала, все неизотропные экстремали которого совпадают с экстремалими функционала действия. Сейчас мы исследуем типичные особенности определенных таким образом геодезических потоков в случае, когда размерность многообразия равна двум, а псевдофинслерова метрика задана формой степени три общего положения.

Ключевые слова: псевдофинслеровы пространства; геодезические; особые точки; нормальные формы

1. Введение и предварительные сведения

Для удобства читателя мы кратко излагаем некоторые результаты предшествующей статьи [1], необходимые для понимания настоящей работы.

1.1. Общий случай. *Финслеровым пространством*, следуя [2], мы называем пару (M, \bar{F}) или, эквивалентно, (M, \bar{f}) , где M – гладкое (здесь и далее это означает C^∞ , если не оговорено противное) многообразие, $\dim M = m$, с координатами (x_i) , снабженное функцией $\bar{F}(x_i; \dot{x}_i): TM \rightarrow \mathbb{R}$, положительно однородной степени $n \geq 2$ по переменным (\dot{x}_i) , гладкой на дополнении нулевого сечения касательного расслоения TM , и удовлетворяющей условиям:

В. $\bar{F}(x_i; \dot{x}_i) > 0$, если $|\dot{x}_1| + \dots + |\dot{x}_m| \neq 0$.

С. Гессиан функции \bar{f}^2 по переменным (\dot{x}_i) положительно определен, т. е.

$$\sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2(\bar{f}^2)}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_j} \xi_i \xi_j > 0, \quad \text{если} \quad \sum_{i=1}^m |\xi_i| \neq 0. \quad (1)$$

Функция $\bar{f}(x_i; \dot{x}_i) = \bar{F}^{\frac{1}{n}}(x_i; \dot{x}_i)$ гладкая на всем дополнении нулевого сечения касательного расслоения TM и положительно однородная степени 1 по (\dot{x}_i) . Квадратичная форма (1) называется *фундаментальным тензором*, а \bar{f} – *метрической функцией* на M .

Метрическая функция $\bar{f}(x_i; \cdot)$ определяет норму на каждом касательном пространстве $T_x M$. Это позволяет определить функционалы действия и длины, аналогично тому, как это делается для римановых метрик. Именно, для кривой $\gamma: I \rightarrow M$ мы имеем:

$$J^{(\nu)}(\gamma) = \int_I \bar{f}^\nu(x_i; \dot{x}_i) dt = \int_I \bar{F}^{\frac{\nu}{n}}(x_i; \dot{x}_i) dt, \quad \dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt},$$

где $\nu=1$ (длина) или $\nu=2$ (действие), см., например, [2, 3]. Как и в римановом случае, функционал длины $J^{(1)}$ инвариантен относительно перепараметризаций кривой γ , а функционал действия $J^{(2)}$ – не инвариантен.

Параметризованные геодезические могут быть определены как экстремали функционала действия $J^{(2)}$, соответствующая параметризация называется *натуральной* или *канонической* (она пропорциональна длине дуги кривой, где $ds = \bar{f}$).

Непараметризованные геодезические могут быть определены как экстремали любого из двух функционалов $J^{(2)}$ и $J^{(1)}$. Различие в использовании $J^{(2)}$ и $J^{(1)}$ состоит в следующем. В первом случае мы просто забываем натуральную параметризацию экстремалей функционала $J^{(2)}$, а во втором случае система уравнений Эйлера–Лагранжа с лагранжианом $\bar{f}(x_i; \dot{x}_i)$ содержит не m , а всего лишь $m - 1$ независимых уравнений, см. [2]. Это обстоятельство отражает тот факт, что функционал длины $J^{(1)}(\gamma)$ инвариантен относительно перепараметризаций γ . Используя имеющуюся степень свободы и рассматривая только непрерывно дифференцируемые геодезические, имеющие в каждой точке определенное касательное направление, можно положить параметр t равным одной из координат x_i , уменьшив число уравнений в системе Эйлера–Лагранжа для $J^{(1)}(\gamma)$ на единицу.

Непараметризованные геодезические в финслеровых пространствах можно определить как экстремали функционала $J^{(\nu)}$ с произвольным $\nu \geq 1$, в частности, $\nu = n$ (см. [1]). Такое изменение определения геодезических не дает ничего нового, но для псевдофинслеровых пространств оно оказывается весьма полезно.

Псевдофинслеровым пространством (или *обобщенным финслеровым пространством*), следуя [2], мы называем пару (M, \bar{F}) или, эквивалентно, (M, \bar{f}) , где многообразие M и функции \bar{F}, \bar{f} удовлетворяют всем условиям из определения финслерова пространства, кроме В и С. Отсутствие условия В приводит к появлению *изотропной гиперповерхности* \mathcal{F} , задаваемой в касательном расслоении TM уравнением $\bar{F}(x_i; \dot{x}_i) = 0$. Хорошо известным примером псевдофинслерова пространства является так называемое *пространство Бервальда–Моора*, в котором $\bar{f}(x_i; \dot{x}_i) = (\dot{x}_1 \cdots \dot{x}_n)^{\frac{1}{n}}$, $n = m$.

Начиная с этого момента, мы будем рассматривать псевдофинслеровы пространства и под (непараметризованными) геодезическими в таких пространствах подразумевать проекции на M экстремалей функционала $J^{(n)}$, т. е. решений системы уравнений Эйлера–Лагранжа

$$\sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_j} \ddot{x}_j + \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial \dot{x}_i \partial x_j} \dot{x}_j = \frac{\partial \bar{F}}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2)$$

отличные от точки.

Так как мы исследуем непараметризованные геодезические, удобно перейти от TM к проективизированному касательному расслоению PTM с помощью стандартной проективизации $\Pi: TM \rightarrow PTM$, при которой проективизируется касательное пространство в каждой точке многообразия M . Например, положив $x = x_1$, $y_i = x_i$ и $p_i = dy_i/dx$ для $i = 2, \dots, m$, и перейдя от лагранжиана $\bar{F}(x_i; \dot{x}_i)$ лагранжиану $F(x, y_i, p_i) = \bar{F}/\dot{x}_1^n$. При этом система уравнений (2) перейдет в некоторую систему, состоящую из $m - 1$ уравнений второго порядка. Заметим, что изотропная гиперповерхность \mathcal{F} , задаваемая в пространствах TM и PTM уравнениями

$\bar{F}=0$ и $F=0$, соответственно, является инвариантной гиперповерхностью обеих систем. Кроме того, в случае $m=2$ все изотропные линии являются непараметризованными экстремалиями функционала $J^{(n)}$.

1.2. Двумерный случай. Выпишем систему уравнений в PTM явно в двумерном случае ($m=2$), предположив также, что функция \bar{F} является однородным полиномом степени $n \geq 2$ по переменным (\dot{x}_i) . Обозначим координаты на многообразии M через (x, y) , т. е. положим

$$\bar{F}(x, y; \dot{x}, \dot{y}) = \sum_{i=0}^n a_i(x, y) \dot{x}^{n-i} \dot{y}^i, \quad F(x, y; p) = \sum_{i=0}^n a_i(x, y) p^i,$$

где коэффициенты a_i гладко зависят от (x, y) . Система (2) в этом случае принимает вид

$$\ddot{x} = \frac{\bar{H}_1}{\bar{H}}, \quad \ddot{y} = \frac{\bar{H}_2}{\bar{H}}, \quad \bar{H} = \left| \begin{matrix} \bar{F}_{\dot{x}\dot{x}} & \bar{F}_{\dot{x}\dot{y}} \\ \bar{F}_{\dot{x}\dot{y}} & \bar{F}_{\dot{y}\dot{y}} \end{matrix} \right|, \quad \bar{H}_1 = \left| \begin{matrix} \bar{G}_1 & \bar{F}_{\dot{x}\dot{y}} \\ \bar{G}_2 & \bar{F}_{\dot{y}\dot{y}} \end{matrix} \right|, \quad \bar{H}_2 = \left| \begin{matrix} \bar{F}_{\dot{x}\dot{x}} & \bar{G}_1 \\ \bar{F}_{\dot{x}\dot{y}} & \bar{G}_2 \end{matrix} \right|, \quad (3)$$

где $\bar{G}_1 = \bar{F}_x - \dot{x}\bar{F}_{\dot{x}x} - \dot{y}\bar{F}_{\dot{x}y}$ и $\bar{G}_2 = \bar{F}_y - \dot{x}\bar{F}_{\dot{x}y} - \dot{y}\bar{F}_{\dot{y}y}$.

Стандартная проективизация $\Pi: TM \rightarrow PTM$ переводит систему (3) в

$$p = \frac{dy}{dx}, \quad \frac{dp}{dx} = \frac{H_2 - pH_1}{H} = \frac{P}{\Delta}, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta(x, y; p) &= nFF_{pp} - (n-1)F_p^2, \\ P(x, y; p) &= nF(F_y - F_{xp} - pF_{yp}) + (n-1)F_p(F_x + pF_y). \end{aligned} \quad (5)$$

Δ и P являются полиномами по p степеней не больше $2n-4$ и $2n-1$, соответственно. В частности, $\Delta(x, y; p) = (2na_n a_{n-2} - (n-1)a_{n-1}^2)p^{2n-4} + \dots + 2na_0 a_2 - (n-1)a_1^2$.

Систему уравнений (4) удобно записать как векторное поле

$$\Delta \left(\frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial y} \right) + P \frac{\partial}{\partial p} \quad (6)$$

на PTM . В соответствии с принятым определением, непараметризованные геодезические суть проекции интегральных кривых поля (6) из PTM на M , отличные от точки. Поле контактных плоскостей $dy = pdx$ высекает на инвариантной изотропной поверхности $\mathcal{F} \subset PTM$ поле направлений, интегральные кривые которого соответствуют (при проектировании $PTM \rightarrow M$) изотропным геодезическим. Все остальные интегральные кривые поля (6), не лежащие целиком на изотропной поверхности \mathcal{F} , соответствуют неизотропным геодезическим.

Особенности геодезического потока возникают в тех точках пространства PTM , где функция $\Delta(x, y; p)$ обращается в нуль. В области $M' \subset M$, через каждую точку которой проходят m изотропных линий псевдофинслерова пространства, т. е. многочлен $F(p)$ имеет m вещественных корней (с учетом кратностей и, возможно, включая в число корней $p = \infty$), описание множества особых точек геодезического потока (уравнения (4)) весьма просто. Именно, в точке $(x, y) \in M'$ функция $\Delta(x, y; p)$ обращается в нуль если и только если хотя бы две из m изотропных линий, проходящих через данную точку, касаются друг друга, причем p – соответствующее касательное направление. Это утверждение не верно для дополнения области M' , где многочлен $F(p)$ имеет комплексные корни, и в области $M \setminus M'$ множество особых точек устроено иначе.

2. Кубические псевдофинслеровы метрики

Пусть $n=3$ и $m=2$. Обозначим через $D_{[F]}$ и $D_{[\Delta]}$ соответственно дискриминант кубического многочлена $F(x, y; p)$ и дискриминант квадратного многочлена $\Delta(x, y; p)$ по переменной p . Простое вычисление показывает, что $D_{[\Delta]} = -12D_{[F]}$.

Введем следующую стратификацию двумерного многообразия M . Открытые области M_+, M_- определяются условиями $D_{[F]} > 0, D_{[F]} < 0$, соответственно. В случае общего положения области M_+, M_- разделены дискриминантной кривой $M_0: D_{[F]} = 0$, которая состоит из регулярных точек (кубический многочлен F имеет один простой корень и один двойной корень) и каспов (F имеет тройной корень), причем каспы – изолированные точки кривой M_0 . Символом $M_{0,1}$ обозначим множество всех регулярных точек кривой M_0 , а также введем обозначение $M_{0,0} = M_0 \setminus M_{0,1}$. В области M_+ дискриминант квадратного многочлена Δ строго отрицателен, поэтому особые точки уравнения (4) могут быть только в области M_- или на кривой M_0 . Далее мы исключаем из рассмотрения страт $M_{0,0}$ размерности нуль (состоящий из дискретного множества точек) и будем рассматривать только особые точки в стратах M_- и $M_{0,1}$.

В малой окрестности каждой точки $(x, y) \in M \setminus M_{0,0}$ кубический многочлен F имеет по крайней мере один простой вещественный корень $p_*(x, y)$, гладкой зависящий от x, y . Чтобы упростить вычисления, будем считать рассматриваемую точку началом координат 0 и выберем локальные координаты в окрестности 0 таким образом, чтобы интегральные кривые векторного поля $\frac{dy}{dx} = p_*(x, y)$ (одного из трех семейств изотропных линий) приняли вид $x = \text{const}$. При этом, очевидно, получаем $a_3(x, y) \equiv 0$ и

$$\begin{aligned} F &= ap^2 + 2bp + c, \quad \Delta = -2(ap + b)^2 + 6(ac - b^2), \quad D_{[F]} = 4a^2(b^2 - ac), \\ M_{\pm} &= \{\pm(b^2 - ac) > 0, a \neq 0\}, \quad M_{0,1} = \{b^2 - ac = 0, a \neq 0\}, \\ P &= 3F(F_y - F_{xp} - pF_{yp}) + 2F_p(F_x + pF_y). \end{aligned} \tag{7}$$

2.1. Особенности на страте M_- . В каждой точке области M_- квадратное уравнение $\Delta = 0$ имеет два простых вещественных корня

$$p_{1,2} = \frac{\pm\delta - b}{a}, \quad \delta = \sqrt{3(ac - b^2)},$$

и следовательно, область M_- заполнена двумя трансверсальными семействами интегральных кривых бинарного дифференциального уравнения $\Delta = 0$, которые мы будем называть *сингулярными линиями* рассматриваемой псевдофинслеровской метрики.

Рассмотрим две кривые $S_i \subset M_-$, задаваемые уравнениями $P(x, y; p_i) = 0, i = 1, 2$, где P определено в (7). Эти кривые вместе составляют множество $\text{res}(\Delta, P) = 0$, где res означает результат двух многочленов по p . В проективизированном касательном расслоении PTM рассмотрим соответствующие кривые

$$\bar{S}_i = \{(x, y; p_i) : (x, y) \in S_i\}, \quad i = 1, 2,$$

состоящие из особых точек поля (6).

Обозначим через Γ_q семейство геодезических, выходящих из точки $q = (x, y)$. Простейший тип особенностей геодезического потока (корузмерности 0) описывается следующей теоремой.

Т е о р е м а 1. Пусть $q \in M_-$ и $(q; p_i) \notin \bar{S}_i, i = 1, 2$. Тогда существует единственная геодезическая, проходящая через точку q с касательным направлением p_i : эта геодезическая – полукубическая парабола с каспом в q . В частности, если $q \in M_- \setminus (S_1 \cup S_2)$, семейство Γ_q содержит ровно две полукубические параболы с касательными направлениями p_i , в то время как геодезические со всеми остальными касательными направлениями в точке q гладкие.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $P(q; p_i) \neq 0$, то согласно стандартной теореме существования и единственности, поле (6) имеет единственную интегральную кривую γ_i , проходящую через точку $(q; p_i)$. Из условий $a \neq 0, ac - b^2 \neq 0$ следует, что Δ и Δ_p не обращаются в нуль одновременно, см. формулу (7).

Кривая γ_i имеет касание первого порядка с *вертикальным* направлением (вертикальным направлением в пространстве PTM называется направление параллельное оси p , т. е. ядро стандартного проектирования $PTM \rightarrow M$) в точке $(q; p_i)$. Следовательно, проекция кривой γ_i на многообразие M является полукубической параболой с каспом в точке q и касательным направлением p_i .

Пример 1. Пусть функция $F = p^2 + c$. Тогда $\Delta = 2(3c - p^2)$ и $P = 7c_y p^2 + 4c_x p + 3cc_y$. Страты M_- и $M_{0,1}$ определены условиями $c(x, y) > 0$ и $c(x, y) = 0$, соответственно, и кривые S_i имеют вид $c_x = \pm 2c_y \sqrt{3c}$.

I. Положим $c(x, y) = -x$ (рис. 1, слева). Тогда, очевидно, $S_1 = S_2 = \emptyset$, и полуплоскость $x > 0$ (M_+) заполнена сетью изотропных линий $y = \pm \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \text{const}$ (изображены штриховым пунктиром), а полуплоскость $x < 0$ (M_-) заполнена сетью сингулярных линий $y = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}(-x)^{\frac{3}{2}} + \text{const}$ (изображены точечным пунктиром). Каспы на геодезических появляются, когда геодезические (сплошные линии) касаются сингулярных линий. Отметим, что геодезические проходят из области M_- в M_+ и обратно, пересекая страт $M_{0,1}$ (ось y) без появления сингулярности, если они пересекают ось y с любым неизотропным касательным направлением $p \neq 0$. В противном случае уравнение (4) имеет особенности в точках страта $M_{0,1}$. Далее мы увидим, что в таких точках существует однопараметрическое семейство геодезических, выходящих в обе области M_+ и M_- с общим касательным направлением $p = 0$, и продолжение геодезических через $M_{0,1}$ не является естественно определенным.

II. Положим $c(x, y) = \alpha y^2 - x$ с $\alpha \neq 0$. Тогда $S_i \neq \emptyset$, $i = 1, 2$, но ни одна из кривых S_i не проходит через начало координат. На рис. 1 (справа) изображены геодезические в окрестности начала координат, не содержащей точек ни одной из кривых S_i . Для определенности мы считаем здесь $\alpha > 0$. Все обозначения здесь те же самые, что и прежде.

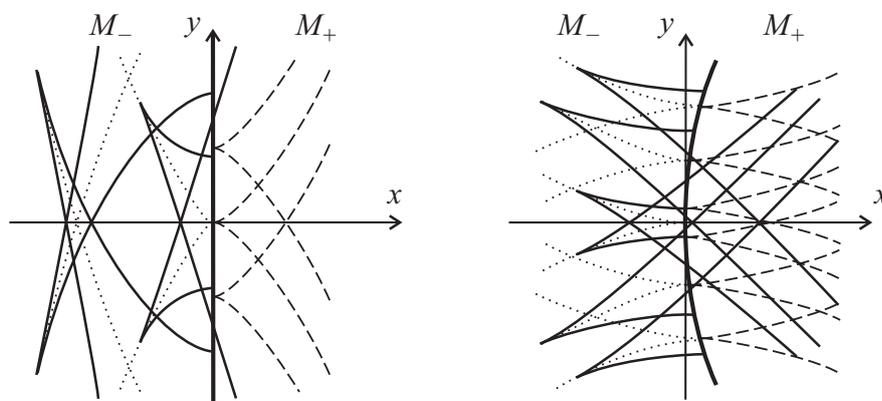


Рис. 1. Пример 1: I и II (слева и справа, соответственно). Страт $M_{0,1}$ (ось y слева и парабола справа) изображен сплошной жирной линией. Геодезические и сингулярные линии изображены сплошными линиями и точечным пунктиром, соответственно. Изотропные линии – штриховым пунктиром

Следующий тип особых точек геодезического потока в области M_- (коразмерности 1) связан с обращением в нуль поля (6). Заметим, что это поле принадлежит к специальному классу векторных полей, особые точки которых не изолированы, а образуют многообразие W коразмерности 2 в фазовом пространстве. Это условие может быть выражено в алгебраической форме: ростки всех компонент поля в особой точке принадлежат идеалу I (в кольце гладких ростков), порожденном двумя из них. Спектр линейной части такого поля в любой особой точке (для краткости, будем называть его просто спектром поля) может содержать только

два ненулевых собственных значения $\lambda_{1,2}$.

В случае поля (6) идеал $I = \langle \Delta, P \rangle$, и множество особых точек поля $W = \overline{S}_1 \cup \overline{S}_2$. Ненулевые собственные значения $\lambda_{1,2}$ описываются следующей леммой.

Л е м м а 1.

1. Во всех точках $(q; p) \in \overline{S}_i$ имеет место резонанс $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, т. е. $\lambda_{1,2}$ – вещественные или чисто мнимые числа с противоположными знаками.

2. Следующие утверждения эквивалентны:

2.1. Собственные значения $\lambda_{1,2}$ в точке $(q; p) \in \overline{S}_i$ не равны нулю.

2.2. В точке $(q; p)$ кривая \overline{S}_i регулярна и трансверсальна контактной плоскости.

2.3. В точке q кривая S_i регулярна и направление p_i трансверсально S_i .

3. В случае общего положения условия 2.1–2.3 выполнены почти во всех $(q; p) \in \overline{S}_i$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Без ограничения общности предположим, что $q = 0$ (начало координат) принадлежит кривой S_1 и выберем локальные координаты с центром в точке 0 таким образом, чтобы сохранить линии $x = \text{const}$ и превратить интегральные кривые векторного поля $\frac{dy}{dx} = p_1(x, y)$ в семейство параллельных прямых $y = \text{const}$. Существование таких локальных координат следует из следующего общего факта: если V_1 и V_2 – гладкие векторные поля на плоскости, трансверсальные в точке 0, то в окрестности 0 найдутся такие локальные координаты, в которых интегральные кривые полей V_1 и V_2 совпадают с координатными линиями.

Тогда многочлены $F, \Delta, D_{[F]}$ принимают вид (7) и в окрестности точки 0 выполнены соотношения $p_1 \equiv 0$ и $b(x, y) \equiv \delta(x, y)$. Заметим, что первое из них влечет за собой тождество $3ac \equiv 4b^2$. С учетом $b^2 - ac < 0$ отсюда следует $ac > 0$, а также то, что в окрестности точки 0 ни один из коэффициентов a, b, c не обращается в нуль. Далее мы представим доказательство для страта S_1 , заданного уравнением $3c(c_y - 2b_x) + 4bc_x = 0$. Доказательство для страта S_2 аналогично.

Обозначим через Λ матрицу вещественной части поля (6) и через Λ_1 матрицу пфаффовоу системы $d\Delta = 0, dP = 0, pdx - dy = 0$, рассматриваемые в произвольной точке $(q; p) \in \overline{S}_1$, т. е. $q \in S_1$ и $p = 0$:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Delta_x & \Delta_y & \Delta_p \\ 0 & 0 & 0 \\ P_x & P_y & P_p \end{pmatrix} \Big|_{p=0}, \quad \Lambda_1 = \begin{pmatrix} \Delta_x & \Delta_y & \Delta_p \\ P_x & P_y & P_p \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Big|_{p=0},$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_x \Big|_{p=0} &= 6(ac_x + a_xc) - 16bb_x, & \Delta_p \Big|_{p=0} &= -4ab, \\ P_x \Big|_{p=0} &= c_x(3c_y - 2b_x) + 4bc_{xx} + 3c(c_{xy} - 2b_{xx}), \\ P_p \Big|_{p=0} &= 4ac_x - 6a_xc + 2b(5c_y - 2b_x). \end{aligned} \tag{8}$$

1. Для доказательства утверждения 1 достаточно показать, что $\text{tr}\Lambda = 0$. С учетом равенства $3c(c_y - 2b_x) + 4bc_x = 0$, выполненного в точках кривой S_1 и тождества $b \equiv \delta$ (из которого следует $3ac \equiv 4b^2$), выполненного в окрестности точки 0, из (8) получаем

$$\text{tr}\Lambda = (\Delta_x + P_p) \Big|_{p=0} = 10[ac_x + b(c_y - 2b_x)] = 10\left(ac_x - b\frac{4bc_x}{3c}\right) = \frac{10c_x}{3c}(3ac - 4b^2) = 0.$$

Уравнение характеристического многочлена матрицы Λ имеет вид $\lambda(\lambda^2 + |\Lambda_1|) = 0$, откуда вытекает уравнение $\lambda^2 + |\Lambda_1| = 0$ для собственных значений $\lambda_{1,2}$.

2. Дифференцируя тождество $4b^2 \equiv 3ac$ по x , получаем $8bb_x \equiv 3(a_xc + ac_x)$. Используя

оба эти тождества и (8), находим

$$\begin{aligned} \Delta_x|_{p=0} &= 6(ac_x + a_xc) - 16bb_x = 6(ac_x + a_xc) - 6(ac_x + a_xc) = 0, \\ |\Lambda_1| &= -\Delta_p P_x|_{p=0} = 16ab^2c_{xx} - 8abb_xc_x + 12ab[c_xc_y + cc_{xy} - 2b_{xx}c] = \\ &= 12a^2cc_{xx} - 3ac_x(a_xc + ac_x) + 12ab[c_xc_y + cc_{xy} - 2b_{xx}c]. \end{aligned}$$

Таким образом, $\lambda_{1,2} \neq 0$ равносильно $|\Lambda_1| \neq 0$, что эквивалентно условию 2.2.

С другой стороны, нетрудно видеть, что кривая S_1 касается направления $p=0$ в точке $q=0$, если и только если в этой точке выполнено равенство $[3c(c_y - 2b_x) + 4bc_x]'_x = 0$. Принимая во внимание тождества $4b^2 \equiv 3ac$ и $8bb_x \equiv 3(a_xc + ac_x)$, мы получаем

$$\begin{aligned} [3c(c_y - 2b_x) + 4bc_x]'_x &= 3(c_xc_y + cc_{xy}) - 6b_{xx}c + \frac{4b^2c_{xx} - 2bb_xc_x}{b} = \\ &= 3(c_xc_y + cc_{xy}) - 6b_{xx}c + \frac{12acc_{xx} - 3(a_xc + ac_x)c_x}{4b} = \frac{|\Lambda_1|}{4ab}. \end{aligned}$$

Это доказывает, что $\lambda_{1,2} \neq 0$ равносильно условию 2.3.

3. В случае общего положения почти во всех точках $(q; p) \in \bar{S}_1$ оба определителя

$$\begin{vmatrix} \Delta_x & \Delta_y \\ P_x & P_y \end{vmatrix}, \quad |\Lambda_1| = \begin{vmatrix} \Delta_x & \Delta_p \\ P_x & P_p \end{vmatrix}$$

не равны нулю. Следовательно, S_1 и \bar{S}_1 – регулярные кривые и, более того, выполнены условия 2.1–2.3.

Т е о р е м а 2. *Предположим, что $(q; p_i) \in \bar{S}_i$ – особая точка общего положения векторного поля (6). Тогда росток поля (6) в точке $(q; p_i)$ гладко орбитально эквивалентен*

$$\xi \frac{\partial}{\partial \xi} - \eta \frac{\partial}{\partial \eta} + \xi \eta \frac{\partial}{\partial \zeta}, \quad \text{если } \lambda_{1,2} \in \mathbb{R} \setminus 0, \quad (9)$$

$$\eta \frac{\partial}{\partial \xi} - \xi \frac{\partial}{\partial \eta} + (\xi^2 + \eta^2) \frac{\partial}{\partial \zeta}, \quad \text{если } \lambda_{1,2} \in \mathbb{I} \setminus 0, \quad (10)$$

где \mathbb{R}, \mathbb{I} – вещественная и мнимая оси, соответственно. В первом случае существуют две геодезические, проходящие через точку $q \in S_i$ с касательным направлением p_i , обе эти геодезические гладкие. Во втором случае не существует геодезических, проходящих через точку $q \in S_i$ с касательным направлением p_i .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что в точке $(q; p_i) \in \bar{S}_i$ собственные значения $\lambda_{1,2} \neq 0$, и следовательно, линейная часть ростка поля (6) в этой точке орбитально эквивалентна линейной части ростка (9) или (10) в нуле. Более того, прямое вычисление показывает, что если квадратичная часть ростка (6) – общего положения (именно, ее коэффициенты не удовлетворяют некоторому специальному условию типа равенства), то 2-струя ростка (6) орбитально эквивалентна 2-струе ростка (9) или (10). В случае $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$ упомянутое специальное условие явно указано в работе [4] (раздел 6), в случае $\lambda_{1,2} \in \mathbb{I}$ оно аналогично. Используя результаты работ [5]–[7], можно видеть, что росток поля (6) в точке $(q; p_i) \in \bar{S}_i$, удовлетворяющий описанным выше условиям общности положения, гладко орбитально эквивалентен одному из ростков (9), (10).

Вещественный случай. Очевидно, что поле (9) имеет первый интеграл $\xi\eta$. Соответствующее инвариантное слоение $\xi\eta = \text{const}$ содержит ровно два слоя, проходящих через множество особых точек этого поля, именно, плоскости $\xi = 0$ и $\eta = 0$. Все остальные слои этого слоения суть гиперболические цилиндры $\xi\eta = \text{const} \neq 0$, не пересекающиеся с множеством особых

точек поля (9). Легко видеть, что для каждой особой точки поля (9) существует ровно две интегральные кривые, проходящие через эту точку: прямые линии, параллельные оси ξ и оси η , соответственно.

Покажем, что собственные направления с собственными значениями $\lambda_{1,2} \neq 0$, не вертикальные. Пусть e – собственный вектор матрицы Λ , соответствующий λ_i . Тогда $\Lambda e = \lambda_i e$ и $e = \alpha \partial_x + \beta \partial_p$, где $(\Delta_x|_{p=0} - \lambda_i)\alpha + \Delta_p|_{p=0}\beta = 0$. Если вектор e вертикальный, т. е. $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$, из последнего равенства следует $\Delta_p|_{p=0} = 0$. Тогда из (8) следует, что $a(0) = 0$ или $b(0) = 0$. Но оба эти равенства противоречат тому, что ни один из коэффициентов a, b, c не обращается в нуль в точке 0 (этот факт был установлен при доказательстве леммы 1). Из сказанного следует, что поле (6) имеет только две интегральные кривые, проходящие через данную точку $(q; p_i)$, обе они являются гладкими и имеют неvertикальные касательные направления в данной точке. Проектируя эти кривые из PTM на M , мы получаем две гладкие геодезические, проходящие через точку $q \in S_i$ с касательным направлением p_i ; см. рис. 2 (слева).

Мнимый случай. Очевидно, что поле (10) имеет первый интеграл $\xi^2 + \eta^2$. Соответствующее инвариантное слоение $\xi^2 + \eta^2 = \text{const}$ содержит вырожденный одномерный слой $\xi = \eta = 0$, целиком состоящий из особых точек поля (10) и однопараметрическое семейство двумерных инвариантных слоев (эллиптических цилиндров $\xi^2 + \eta^2 = \text{const} \neq 0$), не пересекающихся со множеством особых точек поля. Эти эллиптические цилиндры заполнены интегральными кривыми, имеющими вид спиралей, проекции которых на M имеют каспы; см. рис. 2 (справа).

Для завершения доказательства остается заметить, что и в вещественном, и в мнимом случае сами кривые S_i не являются геодезическими, так как кривые \bar{S}_i трансверсальны контактнм плоскостям $pdx - dy = 0$ (пункт 2.2 в лемме 1). Следовательно, кривые \bar{S}_i не являются 1-графиками никаких кривых, лежащих на многообразии M .

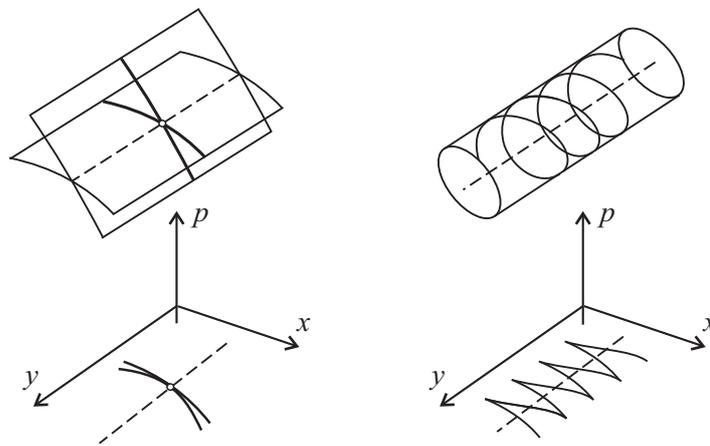


Рис. 2. Фазовый портрет поля (6) в случае нормальной формы (9) и (10) (слева и справа, соответственно) и проекции его интегральных кривых на плоскость (x, y) . Кривые \bar{S}_i (сверху) и их проекции – кривые S_i (снизу) изображены штриховым пунктиром

Пример 2. Рассмотрим функцию $F = p^2 + c(x, y)$, где $c(x, y) = \alpha y^2 - x$ с вещественным параметром α . Тогда $\Delta = 2(3c - p^2)$, $P = 12\alpha y p^2 - 4p + 6\alpha y c$, и кривые S_i являются связными компонентами графика функции $x = \alpha y^2 - \frac{1}{48}/\alpha^2 y^2$, лежащими в верхней и нижней полуплоскостях. Простое вычисление показывает, что $p_i|_{S_i} = 12\alpha y(\alpha y^2 - x)$, следовательно, направление p_i касательно к кривой S_i в единственной точке $x = \frac{47}{48}/\sqrt{\alpha}$. По лемме 1 (пункт 2.3),

собственные значения $\lambda_{1,2} \neq 0$ во всех точках кривой \bar{S}_i , если $\alpha < 0$ и во всех точках кривой \bar{S}_i при $x \neq \frac{47}{48}/\sqrt{\alpha}$, если $\alpha \geq 0$.

На рис. 3 (слева и в центре) изображены геодезические при $\alpha > 0$. При этом существуют особые точки как с вещественными, так и с мнимыми $\lambda_{1,2}$. Те части кривой S_i , которые соответствуют вещественным (соответственно, мнимым) собственным значениям $\lambda_{1,2} \neq 0$, изображены коротким (соответственно, длинным) пунктиром. Кругком отмечены точки кривых S_i с абсциссой $x = \frac{47}{48}/\sqrt{\alpha}$, где $\lambda_{1,2} = 0$. На рис. 3 (справа) изображены геодезические при $\alpha < 0$. В этом случае имеются только особые точки вещественными $\lambda_{1,2}$, и кривые S_i целиком изображены коротким пунктиром. Кругком отмечены точки, в которых геодезические пересекают кривые S_i с сингулярным касательным направлением p_i .

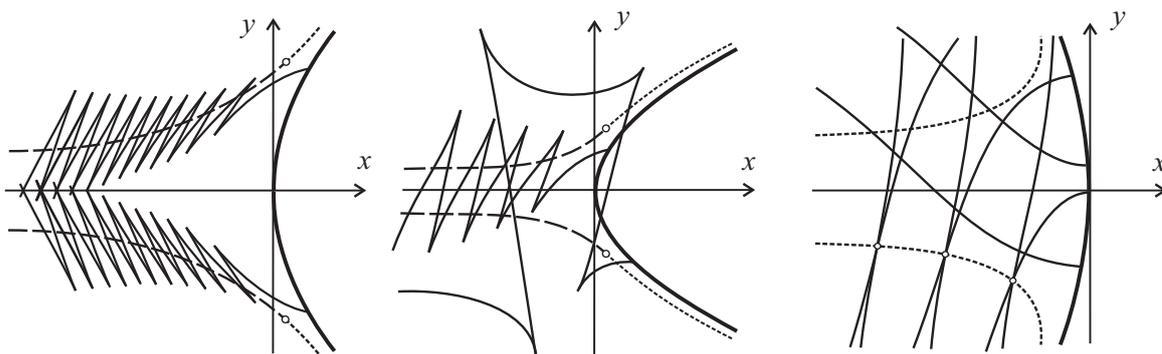


Рис. 3. Пример 2: $F = p^2 + c$, где $c = \alpha y^2 - x$ при $\alpha > 0$ (слева, в центре) и при $\alpha < 0$ (справа). Геодезические изображены сплошными линиями. Страт $M_{0,1}$ изображен жирной сплошной линией, кривые S_i изображены коротким (длинным) пунктиром, если $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R} \setminus 0$ (соответственно, $\lambda_{1,2} \in \mathbb{I} \setminus 0$)

2.2. Особенности на страте $M_{0,1}$. В этом разделе, как и ранее, мы будем работать в таких локальных координатах, где F , Δ и $D_{[F]}$ имеют вид (7). В каждой точке $q \in M_{0,1}$ многочлен F имеет двойной корень $p_0 = -b/a$. Легко видеть, что p_0 является также двойным корнем многочлена Δ в q (это следует также из леммы 4 статьи [1]). Таким образом, $(q; p_0)$, $q \in M_{0,1}$, суть особые точки сразу двух неявных дифференциальных уравнений $F = 0$ и $\Delta = 0$. Из (5) следует, что $P(q; p_0) = 0$, поэтому точки $(q; p_0)$, $q \in M_{0,1}$, являются особыми также и для поля (6): все компоненты векторного поля обращаются в нуль, и никакое направление в этих точках не определено.

Далее мы ограничимся рассмотрением типичных особых точек $q \in M_{0,1}$, в окрестности которых $M_{0,1}$ – регулярная кривая и изотропное направление p_0 трансверсально $M_{0,1}$. В таких точках оба неявные уравнения $F = 0$ и $\Delta = 0$ имеют нормальную форму Чибрарио $p^2 = x$ (см. [8]), и их интегральные кривые являются полукубическими парабололами, лежащими по разные стороны от $M_{0,1}$ (в областях M_+ и M_- , соответственно), как это представлено на рис. 1. В случае общего положения точки $q \in M_{0,1}$, не удовлетворяющие описанным условиям, лежат на страте $M_{0,1}$ дискретно.

Т е о р е м а 3. *Предположим, что изотропное направление p_0 трансверсально кривой $M_{0,1}$ в точке $q \in M_{0,1}$. Тогда росток поля (6) в особой точке $(q; p_0)$ гладко орбитально эквивалентен*

$$3\xi \frac{\partial}{\partial \xi} + 2\eta \frac{\partial}{\partial \eta} + 0 \frac{\partial}{\partial \zeta}, \quad (11)$$

и направлению p_0 соответствует однопараметрическое семейство геодезических, выходящих из точки q в области M_+ и M_- . Существуют такие локальные координаты с цен-

тром q , в которых это семейство геодезических имеет вид

$$x = \alpha|\eta|^{\frac{3}{2}} + \eta^2 + \alpha\bar{X}_\alpha(\eta), \quad y = \alpha\eta|\eta|^{\frac{3}{2}} + \varepsilon\eta^3 + \alpha\bar{Y}_\alpha(\eta), \quad \varepsilon \neq 0, \quad (12)$$

где $\bar{X}_\alpha(\eta) = o(|\eta|^{\frac{3}{2}})$ и $\bar{Y}_\alpha(\eta) = o(|\eta|^{\frac{5}{2}})$ – C^2 -гладкие функции.

Здесь $\alpha > 0$ ($\alpha < 0$) соответствует неизотропным геодезическим, выходящим из q в область M_+ (соответственно, M_-), а значение $\alpha = 0$ отвечает изотропной геодезической, являющейся полукубической параболой, лежащей в M_+ . Предельный случай $\alpha \rightarrow \infty$ дает единственную регулярную геодезическую, проходящую через точку q с касательным направлением p_0 . В окрестности точки q любая неизотропная геодезическая, выходящая из q в M_+ , содержится в криволинейном секторе, ограниченном двумя ветвями изотропной полукубической параболы, как это представлено на рис. 4.

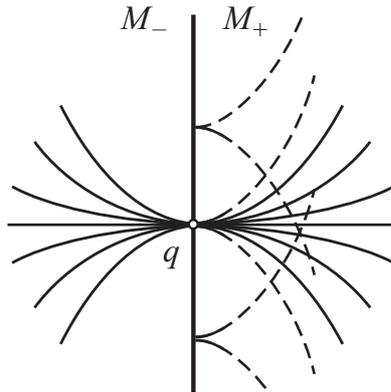


Рис. 4. Иллюстрация к теореме 3. Страт $M_{0,1}$ изображен жирной линией (ось y). Сплошные и пунктирные линии – неизотропные и изотропные геодезические, соответственно

Д о к а з а т е л ь с т в о. Без ограничения общности будем считать, что $q = 0$. Выберем локальные координаты с центром 0 таким образом, чтобы сохранить координатные линии $x = \text{const}$ и обеспечить условие $b(x, y) \equiv 0$. Это можно сделать, используя подходящую замену переменных $y \mapsto yu(x, y)$, $u(0) \neq 0$. Заметим, что в отличие от леммы 1, теперь у нас нет тождества $p_1 \equiv 0$ или $p_2 \equiv 0$ в окрестности точки 0. Более того, теперь уже невозможно получить ни одно из этих тождеств с помощью гладкой замены координат, так как интегральные кривые неявного дифференциального уравнения $\Delta = 0$ с корнями p_1, p_2 имеют каспы на $M_{0,1}$. В выбранные таким образом локальных координатах имеем

$$\begin{aligned} F &= ap^2 + c, \quad \Delta = -2(ap)^2 + 6ac, \quad D_{[F]} = -4a^3c, \\ P &= aa_y p^4 - 2aa_x p^3 + (7ac_y - 3a_y c)p^2 + (4ac_x - 6a_x c)p + 3cc_y. \end{aligned} \quad (13)$$

Кривая $M_{0,1}$ задается равенством $c(x, y) = 0$, и $p_0 = 0$ в каждой точке $q \in M_{0,1}$. Следовательно, условие “направление p_0 трансверсально $M_{0,1}$ в точке 0” эквивалентно условию $c_x(0) \neq 0$.

Подставляя выражения для Δ и P из (13) в (6), нетрудно вычислить, что спектр поля (6) в точке $(q; 0)$, $q \in M_{0,1}$, равен $(\lambda_1, \lambda_2, 0)$, где $\lambda_1 = 6ac_x$, $\lambda_2 = 4ac_x$, а соответствующие собственные векторы имеют вид

$$e_1 = 2a\partial_x + 3c_y\partial_p, \quad e_2 = \partial_p, \quad e_0 = c_y\partial_x - c_x\partial_y.$$

Согласно результатам работ [7], [9], росток поля (6) в точке 0 гладко орбитально эквивалентен ростку (11). Более того, сравнивая (6) и (11), легко видеть, что сопрягающий диффеоморфизм

$(x, y, p) \mapsto (\xi, \eta, \zeta)$ может быть выбран в виде

$$x = 2a\xi + c_y\zeta + f_1(\xi, \eta, \zeta), \quad p = 3c_y\xi + \eta + f_2(\xi, \eta, \zeta), \quad y = -c_x\zeta + f_3(\xi, \eta, \zeta), \quad (14)$$

где a, c_x, c_y вычислены в точке 0 и $f_i \in \mathfrak{M}^1$ (\mathfrak{M}^k , $k \geq 0$, означает идеал, состоящий из k -плоских функций в кольце гладких функций).

Поле (11) имеет двумерное инвариантное слоение $\zeta = \text{const}$. Множество интегральных кривых поля (11), проходящих через начало координат, состоит из оси ξ и однопараметрического семейства кривых

$$\{\xi = \alpha|\eta|^{\frac{3}{2}}, \zeta = 0\}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (15)$$

с общим касательным направлением в 0, стремящихся к оси ξ при $\alpha \rightarrow \infty$. Интегральная кривая поля (6), соответствующая оси ξ в нормальной форме (11), имеет невертикальное касательное направление в точке 0 (собственный вектор e_1), поэтому ее проекция на плоскость (x, y) является гладкой геодезической. Напротив, семейство (15) при переходе к исходным координатам дает семейство интегральных кривых поля (6) с вертикальным касательным направлением в 0 (собственный вектор e_2). Проекция таких кривых на плоскость (x, y) имеют особенность в точке 0. Для того, чтобы понять характер этих особенностей, подставим (15) в (14). Это дает

$$x = 2a\alpha|\eta|^{\frac{3}{2}} + \bar{f}_{1,\alpha}(\eta), \quad p = \eta + \bar{f}_{2,\alpha}(\eta),$$

где $\bar{f}_{i,\alpha}(\eta) = f_i(\alpha|\eta|^{\frac{3}{2}}, \eta, 0)$. Заметим, что функции $\bar{f}_{1,\alpha} = o(|\eta|^{\frac{3}{2}})$ и $\bar{f}_{2,\alpha} = o(\eta)$ являются C^2 - и C^1 -гладкими, соответственно. Обозначив знак переменной η через $s(\eta)$, в результате получаем уравнение

$$dy = p dx = (\eta + \bar{f}_{2,\alpha}(\eta))(3a\alpha|\eta|^{\frac{1}{2}}s(\eta) + \bar{f}'_{1,\alpha}(\eta)) d\eta = (3a\alpha|\eta|^{\frac{3}{2}} + g_\alpha(\eta)) d\eta,$$

где $g_\alpha = o(|\eta|^{\frac{3}{2}})$ – C^1 -гладкая функция. Интегрируя, получаем

$$y = \frac{6}{5}a\alpha|\eta|^{\frac{5}{2}}s(\eta) + h_\alpha(\eta) = \frac{6}{5}a\alpha\eta|\eta|^{\frac{3}{2}} + h_\alpha(\eta),$$

где $h_\alpha = o(|\eta|^{\frac{5}{2}})$ – некоторая C^2 -гладкая функция. Сделаем замену $y \mapsto \frac{5}{3}y$, $\alpha \mapsto \pm 2a\alpha$, получаем

$$x = \alpha|\eta|^{\frac{3}{2}} + X_\alpha(\eta), \quad y = \alpha\eta|\eta|^{\frac{3}{2}} + Y_\alpha(\eta), \quad (16)$$

где $X_\alpha = o(|\eta|^{\frac{3}{2}})$ и $Y_\alpha = o(|\eta|^{\frac{5}{2}})$ – C^2 -гладкие функции и неравенство $\alpha > 0$ ($\alpha < 0$) соответствует области M_+ (соответственно, M_-). Асимптотическая формула (16) имеет смысл для всех вещественных $\alpha \neq 0$.

Для того, чтобы охватить пропущенный случай $\alpha = 0$, вспомним, что изотропная поверхность \mathcal{F} является инвариантной поверхностью поля (6) (лемма 2 из [1]) и содержит все его особые точки (лемма 4 из [1]). Следовательно, в нормальных координатах (ξ, η, ζ) поверхность \mathcal{F} содержит ось ζ и пересекает каждый инвариантный слой $\zeta = \text{const}$ по некоторой интегральной кривой поля (11). Например, \mathcal{F} пересекает слой $\zeta = 0$ по одной из интегральных кривых семейства (15), проекция которой является изотропной геодезической, проходящей через 0. С другой стороны, как мы знаем, неявное дифференциальное уравнение $F = ap^2 + c = 0$, описывающее изотропные линии псевдофинслера пространства (M, \bar{F}) , имеет нормальную форму Чибрарио в точке 0. Следовательно, существует единственная изотропная геодезическая, проходящая через точку 0, – это полукубическая парабола

$$x = \eta^2, \quad y = \eta^3 N(\eta), \quad N(0) \neq 0, \quad (17)$$

лежащая в области M_+ . Из единственности изотропной геодезической, проходящей через точку 0, следует, что 1-график кривой (17) является интегральной кривой семейства (16) с $\alpha = 0$ и $Y_0(\eta) = \eta^3 N(\eta)$. Используя представление $N(\eta) = N_1(\eta^2) + \eta N_2(\eta^2)$ и замену переменных $y \mapsto N_1(0)(y - x^2 N_2(x))/N_1(x)$, получаем $N(\eta) \equiv N(0)$. Нетрудно проверить, что число $\varepsilon = N(0)$ является инвариантом пары кривых (16) и (17).

З а м е ч а н и е 1. В примере 1 мы рассматривали функцию $F = p^2 + c$ с $c = -x$ и $c = \alpha y^2 - x$. В обоих случаях изотропное направление $p_0 = 0$ трансверсально кривой $M_{0,1}$, задаваемой уравнением $x = 0$ и $x = \alpha y^2$, соответственно, и условия теоремы 3 выполнены.

П р и м е р 3. Рассмотрим случай $F = p^2 - x$ более детально. Поле (6) имеет вид

$$-2(3x + p^2) \left(\frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial y} \right) - 4p \frac{\partial}{\partial p}. \quad (18)$$

Легко проверить, что изотропная поверхность \mathcal{F} , заданная уравнением $p^2 = x$, является инвариантной поверхностью поля (18), и единственная изотропная линия, проходящая через точку 0, задается соотношениями $x = p^2$, $y = \frac{2}{3}p^3$. Интегрируя уравнение $dp/dx = 2p/(3x + p^2)$, мы получаем семейство $x = \alpha|p|^{\frac{3}{2}} + p^2$, где α – постоянная интегрирования, и отдельную интегральную кривую $p = 0$, соответствующую гладкой неизотропной геодезической $y = 0$.

Далее, интегрируя соотношение $dy = pdx = p(\frac{3}{2}\alpha|p|^{\frac{1}{2}}s(p) + 2p)dp = (\frac{3}{2}\alpha|p|^{\frac{3}{2}} + 2p^2)dp$, мы получаем соотношение $y = \frac{3}{5}\alpha p|p|^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}p^3 + c_1$, где c_1 – вторая постоянная интегрирования. Семейству геодезических, выходящих из точки $q = 0$, соответствует значение $c_1 = 0$. Замена $y \rightarrow \frac{5}{3}y$ приводит это семейство к виду (12) с $\bar{X}_\alpha \equiv \bar{Y}_\alpha \equiv 0$ и $\eta = p$:

$$x = \alpha|\eta|^{\frac{3}{2}} + \eta^2, \quad y = \alpha\eta|\eta|^{\frac{3}{2}} + \frac{10}{9}\eta^3. \quad (19)$$

При $\alpha = 0$ формула (19) дает изотропную геодезическую. При $\alpha \rightarrow \infty$ кривые (19) стремятся к гладкой геодезической $y = 0$.

З а м е ч а н и е 2. Теорема 3 показывает, что продолжение геодезических через кривую $M_{0,1}$ не определено однозначно. Все геодезические семейства (12) имеют одно и тоже касательное направление в точке $q \in M_{0,1}$ и почти все из них имеют в q особенность одного и того же типа. Кривая, заданная одной формулой (12) с произвольным $\alpha \neq 0$, не имеет преимуществ перед кривой, состоящей из двух дуг (12) с α_1 при $(x, y) \in M_+$ и α_2 при $(x, y) \in M_-$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Курбацкий А.Н., Павлова Н.Г., Ремизов А.О. Особенности геодезических потоков и линий в псевдофинслеровых пространствах. I // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2016. Т. 21. Вып. 1. С. 66–75.
2. Рунд Х. Дифференциальная геометрия финслеровых пространств. М.: Наука, 1981.
3. Matsumoto M. Two-dimensional Finsler spaces whose geodesics constitute a family of special conic sections // J. Math. Kyoto Univ. 1995. V. 35. Iss. 3. P. 357–376.
4. Ремизов А.О. Многомерная конструкция Пуанкаре и особенности поднятых полей для неявных дифференциальных уравнений // СМФН. 2006. Т. 19. С. 131–170.
5. Арнольд В.И., Гивенталь А.Б. Симплектическая геометрия // Совр. проблемы матем. Фундамент. направления. Динамические системы. Т. 4. М.: ВИНТИ, 1985.
6. Martinet J. Sur les singularités des formes différentielles // Ann. Inst. Fourier. 1970. V. 20. № 1. P. 95–178.
7. Roussarie R. Modèles locaux de champs et de formes // Asterisque. 1975. V. 30. P. 1–181.
8. Арнольд В.И., Ильяшенко Ю.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения // Совр. проблемы матем. Фундамент. направления. Динамические системы. Т. 1. М.: ВИНТИ, 1985.
9. Ghezzi R., Remizov A.O. On a class of vector fields with discontinuities of divide-by-zero type and its applications to geodesics in singular metrics // Journal of Dynamical and Control Systems. 2012. V. 18. Iss. 1. P. 135–158.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№ 16-01-00677, 16-01-00766, 15-01-04601, 15-01-05134) и гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ № НШ-8215.2016.1.

Поступила в редакцию 20 октября 2016 г.

Курбацкий Алексей Николаевич, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры эконометрики и математических методов экономики, e-mail: akurbatskiy@gmail.com

Павлова Наталья Геннадьевна, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры нелинейного анализа и оптимизации, e-mail: natasharussia@mail.ru

Ремизов Алексей Олегович, Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории проблем качественного исследования нелинейных динамических систем, e-mail: alexey-remizov@yandex.ru

UDC 514

DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-2005-2018

SINGULARITIES OF GEODESIC FLOWS AND GEODESIC LINES IN PSEUDO-FINSLER SPACES. II

© A. N. Kurbatskiy¹⁾, N. G. Pavlova²⁾, A. O. Remizov³⁾

¹⁾ Lomonosov Moscow State University
1 Leninskie Gory, Moscow, Russian Federation, 119991
Moscow Business School
38A Leninskiy Prospect, Moscow, Russian Federation, 119334
E-mail: akurbatskiy@gmail.com

²⁾ The Peoples' Friendship University of Russia
6 Miklukho-Maklay St., Moscow, Russian Federation, 117198
E-mail: natasharussia@mail.ru

³⁾ V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences
65 Profsoyuznaya St., Moscow, Russian Federation, 117997
E-mail: alexey-remizov@yandex.ru

This is a second paper in the series devoted to singularities of geodesic flows in generalized Finsler (pseudo-Finsler) spaces. In the previous paper, we defined geodesics as extremals of a certain auxiliary functional whose non-isotropic extremals coincide with extremals of the action functional. In the present paper, we study generic singularities of so-defined geodesic flows in the case when the pseudo-Finsler metric is given by a generic form of degree 3 on a two-dimensional manifold.

Key words: Pseudo-Finsler spaces; geodesics; singular points; normal forms

REFERENCES

1. *Kurbatskiy A. N., Pavlova N. G., Remizov A. O.* Osobennosti geodezicheskikh potokov i liniy v psevdofinslerovykh prostranstvakh. I // Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennyye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Review. Series: Natural and Technical Sciences, 2016. T. 21. Vyp. 1. S. 66–75.
2. *Rund H.* Differentsial'naya geometriya finslerovykh prostranstv. M.: Nauka, 1981.
3. *Matsumoto M.* Two-dimensional Finsler spaces whose geodesics constitute a family of special conic sections // J. Math. Kyoto Univ. 1995. V. 35. Iss. 3. P. 357–376.
4. *Remizov A. O.* Mnogomernaya konstruktsiya Puankare i osobennosti podnyatykh poley dlya neyavnykh differentsial'nykh uravneniy // SMFN. 2006. T. 19. S. 131–170.
5. *Arnol'd V. I., Givental' A. B.* Simplekticheskaya geometriya // Sovr. problemy matem. Fundament. napravleniya. Dinamicheskie sistemy. T. 4. M.: VINITI, 1985.
6. *Martinet J.* Sur les singularités des formes différentielles // Ann. Inst. Fourier. 1970. V. 20. № 1. P. 95–178.
7. *Roussarie R.* Modèles locaux de champs et de formes // Asterisque. 1975. V. 30. P. 1–181.
8. *Arnol'd V. I., I'yashenko YU. S.* Obyknovennyye differentsial'nyye uravneniya // Sovr. problemy matem. Fundament. napravleniya. Dinamicheskie sistemy. T. 1. M.: VINITI, 1985.
9. *Ghezzi R., Remizov A. O.* On a class of vector fields with discontinuities of divide-by-zero type and its applications to geodesics in singular metrics // Journal of Dynamical and Control Systems. 2012. V. 18. Iss. 1. P. 135–158.

ACKNOWLEDGEMENTS: The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (projects №№ 16-01-00677, 16-01-00766, 15-01-04601, 15-01-05134) and by the grant of the Russian Federation President for the state support of leading scientific schools № NSh-8215.2016.1.

Received 20 October 2016

Kurbatskiy Aleksei Nikolaevich, Moscow Lomonosov State University, Moscow, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Econometrics and Mathematical Economics methods Department, e-mail: akurbatskiy@gmail.com

Pavlova Natalia Gennadievna, Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Nonlinear Analysis and Optimization Department, e-mail: natasharussia@mail.ru

Remizov Aleksei Olegovich, V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher of the laboratory of Qualitative Analysis for Nonlinear Dynamic System e-mail: alexey-remizov@yandex.ru

Информация для цитирования:

Курбатовский А.Н., Павлова Н.Г., Ремизов А.О. Особенности геодезических потоков и линий в псевдофинслеровых пространствах. II // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2016. Т. 21. Вып. 6. С. 2005-2018. DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-2005-2018

Kurbatskiy A.N., Pavlova N.G., Remizov A.O. Osobennosti geodezicheskikh potokov i liniy v psevdofinslerovykh prostranstvakh [Singularities of geodesic flows and geodesic lines in pseudo-finsler spaces. II]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennyye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Review. Series: Natural and Technical Sciences*, 2016, vol. 21, no. 6, pp. 2005-2018. DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-2005-2018 (In Russian)